

СИСТЕМА АСИМПТОТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕНЗОРОВ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ ОБЪЕМНОГО ТЕЛА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Аннотация. *Актуальность и цели.* Изучена математическая модель рассеяния электромагнитных волн на объемных анизотропных неоднородных телах, помещенных в прямоугольный волновод. *Материалы и методы.* Исходная краевая задача для уравнений Максвелла сводится методом векторных потенциалов к системе интегродифференциальных уравнений по области неоднородности (предполагается, что падающее поле гармонически зависит от времени). Далее выводятся асимптотические уравнения исходя из свойств тензора Грина на бесконечности. *Результаты.* Доказана основная лемма о равномерном стремлении к нулю на бесконечности первой компоненты тензорной функции Грина. На основе полученного в лемме результата изучено асимптотическое поведение всех компонент тензора Грина, а также их производных любого порядка. Выведена система асимптотических интегральных уравнений электромагнитного поля для определения тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей объемного тела по коэффициенту прохождения. Предложен метод вращений объемного тела для определения всех компонент тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей. Получены выражения для преобразованных тензоров проницаемостей в случае поворота тела на произвольный угол вокруг координатных осей. *Выводы.* Полученные результаты могут быть успешно применены для решения обратной задачи дифракции в прямоугольном волноводе.

Ключевые слова: обратная электромагнитная задача дифракции, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей, тензорная функция Грина, асимптотические уравнения, метод вращений.

А. А. Tsupak

SYSTEM OF ASYMPTOTIC INTEGRAL EQUATIONS IN THE PROBLEM OF PERMITTIVITY AND PERMEABILITY TENSORS DETERMINATION OF A VOLUMETRIC BODY IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE

Abstract. *Background.* Objective of the work is to study the mathematical model of electromagnetic waves scattering on volumetric anisotropic heterogeneous bodies in a rectangular waveguide. *Materials and methods.* The initial boundary value problem for Maxwell's equations is reduced using the method of vector potentials to the system of integro-differential equations on heterogeneity area (the falling field is supposed to be harmonically time-dependent). Then the asymptotic equations are derived from the properties of Green's tensor at the infinity. *Results.* The main lemma about uniform tending to zero on infinity of the tensor Green's function first component is proved. On the basis of the result received in that lemma the asymptotic behavior of all components of the Green's tensor as well as their derivatives of any order are studied. The system of the asymptotic integral equations for definition of tensors of dielectric and magnetic permeabilities of the volumetric body on pass-

ing coefficient is obtained. The method of rotations of the volumetric body for definition of all the components of permittivity and permeability tensors is offered. Expressions for the transformed permittivity tensors in the case of arbitrary turns around the coordinate axes are received. *Conclusions.* The results can be successfully applied to solve the inverse problem of diffraction in a rectangular waveguide.

Key words: inverse electromagnetic diffraction problem, permittivity and permeability tensors, tensor Green's function, asymptotic equations, rotation method.

Введение

Рассматривается задача восстановления тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей объемного тела, расположенного в прямоугольном резонаторе, по известным значениям падающего и проходящего полей – эта задача рассматривалась в ряде работ [1–4]. Краевая задача сводится к интегродифференциальным уравнениям по области неоднородности. В настоящей работе (в отличие от [1–4]) предполагается, что тензор $\hat{\mu}(x)$ является неизвестным. Основная цель данной работы – исследование асимптотических свойств тензорной функции Грина рассматриваемой задачи и вывод системы асимптотических уравнений электромагнитного поля. Как будет показано, эти уравнения не содержат всех компонент неизвестных тензоров $\hat{\varepsilon}(x)$, $\hat{\mu}(x)$. Описанный в данной статье метод вращений тела позволяет преобразовать асимптотические уравнения таким образом, чтобы в них входили любые компоненты неизвестных тензор-функций.

1. Постановка задачи. Интегродифференциальные уравнения

Пусть в прямоугольном волноводе $P := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in (0, a), x_2 \in (0, b)\}$ с идеально проводящей границей ∂P расположено объемное тело V , не касающееся стенок волновода. V характеризуется неизвестными тензор-функциями диэлектрической и магнитной проницаемостей $\hat{\varepsilon}(x)$, $\hat{\mu}(x)$. Предполагаем, что вне V среда однородна и изотропна ($\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon_0 \hat{I}$, $\hat{\mu}(x) = \mu_0 \hat{I}$), а внутри V удовлетворяет ограничениям:

$$\hat{\varepsilon}(x), \hat{\mu}(x), \hat{\varepsilon}^{-1}(x), \hat{\mu}^{-1}(x) \in L_{\infty}(V).$$

Падающее (начальное) электромагнитное поле $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ является (известным) решением краевой задачи для уравнений Максвелла в однородном волноводе и распространяется в направлении возрастания x_3 .

Требуется по известным амплитудам приходящего из $-\infty$ поля и поля, прошедшего в $+\infty$, определить диэлектрическую и магнитную проницаемости тела V .

Рассмотренная задача сводится методом векторных потенциалов к интегродифференциальным уравнениям электромагнитного поля по области неоднородности [5]:

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + (k_0^2 + \text{grad div}) \int_V \hat{G}_E(x, y) \hat{\xi}(y) \mathbf{E}(y) dy +$$

$$\begin{aligned}
& +i\omega\mu_0\operatorname{rot}\int_V\widehat{G}_H(x,y)\widehat{\eta}(y)\mathbf{H}(y)dy; \\
\mathbf{H}(x) = & \mathbf{H}_0(x) + (k_0^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_V\widehat{G}_H(x,y)\widehat{\eta}(y)\mathbf{H}(y)dy - \\
& -i\omega\varepsilon_0\operatorname{rot}\int_V\widehat{G}_E(x,y)\widehat{\xi}(y)\mathbf{E}(y)dy,
\end{aligned}$$

где $\widehat{\xi} := \frac{\widehat{\varepsilon}}{\varepsilon_0} - \widehat{I}$, $\widehat{\eta} := \frac{\widehat{\mu}}{\mu_0} - \widehat{I}$; $\widehat{\varepsilon}, \widehat{\mu}$ – неизвестные проницаемости; $\widehat{G}_E(x, y)$, $\widehat{G}_H(x, y)$ – тензорные функции Грина (ТФГ), удовлетворяющие уравнению Гельмгольца и обеспечивающие выполнение краевых условий на ∂P для электромагнитного поля.

2. Тензорные функции Грина. Асимптотические свойства ТФГ

Тензорные функции Грина имеют диагональный вид [6]:

$$\begin{aligned}
G_E^1 &:= \frac{i}{ab} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2-\delta_{n0}}{\gamma_{nm}} \cos \frac{\pi n x_1}{a} \sin \frac{\pi m x_2}{b} \cos \frac{\pi n y_1}{a} \sin \frac{\pi m y_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|}; \\
G_E^2 &:= \frac{i}{ab} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2-\delta_{m0}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n x_1}{a} \cos \frac{\pi m x_2}{b} \sin \frac{\pi n y_1}{a} \cos \frac{\pi m y_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|}; \\
G_E^2 &:= \frac{i}{ab} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2-\delta_{m0}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n x_1}{a} \cos \frac{\pi m x_2}{b} \sin \frac{\pi n y_1}{a} \cos \frac{\pi m y_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|}; \\
G_H^1 &:= \frac{i}{ab} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2-\delta_{m0}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n x_1}{a} \cos \frac{\pi m x_2}{b} \sin \frac{\pi n y_1}{a} \cos \frac{\pi m y_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|}; \\
G_H^2 &:= \frac{i}{ab} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2-\delta_{n0}}{\gamma_{nm}} \cos \frac{\pi n x_1}{a} \sin \frac{\pi m x_2}{b} \cos \frac{\pi n y_1}{a} \sin \frac{\pi m y_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|}; \\
G_H^3 &:= \frac{i}{ab} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2-\delta_{n0})(2-\delta_{m0})}{\gamma_{nm}} \cos \frac{\pi n x_1}{a} \cos \frac{\pi m x_2}{b} \cos \frac{\pi n y_1}{a} \cos \frac{\pi m y_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|}.
\end{aligned}$$

Принятая в настоящей работе запись функций Грина отличается от обозначений в [6] определением γ_{nm} ; а именно полагаем

$$\gamma_{nm} := \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}.$$

Необходимо выбрать ветвь квадратного корня так, чтобы обеспечить отрицательность показателей экспонент при достаточно больших n, m .

Осуществим разрез комплексной плоскости от точки ветвления $w_0 = 0$ вдоль нижней части мнимой оси. Отображение

$$z = \sqrt{w} := \sqrt{|w|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad \varphi := \arg(w) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

является однолиственным, причем

$$w \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \sqrt{w} \in \mathbb{R}_+; \quad w \in \mathbb{R}_- \Rightarrow \sqrt{w} \in i\mathbb{R}_+.$$

Исследуем поведение компонент ТФГ, а также их производных при $x_3 \rightarrow \pm\infty$, эти результаты будут важны для вывода асимптотических уравнений.

Большинство волноводов, применяемых в исследовании распространения волн и свойств материальных сред, работают в так называемом *одномодовом* режиме, при котором свободно может распространяться одна волна на некоторой частоте. Чаще всего используется следующее соотношение ширины и высоты волновода: $a = 2b$.

Будем предполагать, что частота ω выбирается так, что $k_0 \in \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b} \right)$.

Тогда

$$\gamma_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2} \in \begin{cases} \mathbb{R}_+, & \text{если } (m = n = 0) \vee (m = 0, n = 1), \\ i\mathbb{R}_+ & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Значению γ_{10} отвечает распространяющаяся в прямоугольном волноводе мода; волн, отвечающих паре $n = m = 0$, не существует [7].

Рассмотрим основное утверждение об асимптотике ТФГ, по аналогии с которым выводятся и остальные асимптотические свойства.

Лемма. $G_E^1(x, y) \rightarrow 0$ при $x_3 \rightarrow \infty$ равномерно по $y \in V$.

Доказательство. Так как суммирование по m ведется начиная с единицы, то все члены ряда G_E^1 равномерно убывают к нулю при $x_3 \rightarrow \infty$. Представим G_E^1 в виде $G_E^1 = \Sigma' + \Sigma''$, причем в первом слагаемом суммирование будем проводить по n, m таким, что

$$\left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 > \frac{4}{3} k_0^2, \quad (1)$$

а во втором – по всем остальным n, m . Оценим каждое из слагаемых.

Во второй сумме содержится лишь конечное число слагаемых N , поэтому

$$|\Sigma''| \leq CN \left| e^{i\gamma_{nm}^* |x_3 - y_3|} \right| \Rightarrow 0, \quad y \in V,$$

где C – некоторая константа; γ_{nm}^* – значение корня, обеспечивающее оценку сверху.

Рассмотрим теперь ряд Σ' . В силу условия (1) для n, m верно

$$|\gamma_{nm}| > \frac{1}{2} \left| \sqrt{-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} \right|,$$

поэтому

$$|\Sigma'| \leq C_1 \sum e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} |x_3 - y_3|} \leq C_1 \sum e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{\pi n}{a} + \frac{\pi m}{b}\right) |x_3 - y_3|}.$$

В силу интегрального признака сходимости знакопостоянного двойного ряда получим окончательно

$$\begin{aligned} |\Sigma'| &\leq C_1 \int_{u_0}^{+\infty} \int_{v_0}^{+\infty} e^{-(u+v)|x_3 - y_3|} du dv \leq \\ &\leq C_2 \left(\int_{u_*}^{+\infty} e^{-u|x_3 - y_3|} du \right)^2 = \frac{C_2}{|x_3 - y_3|^2} e^{-2u_*|x_3 - y_3|} \xrightarrow{x_3 \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

где $u_0, v_0 > 0, u_* := \min\{u_0, v_0\}$. Лемма доказана.

Аналогично доказывается существование следующих важных пределов:

$$\begin{aligned} G_E^3 &\Rightarrow 0, \quad G_H^2 \Rightarrow 0, \\ G_E^2 - \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3 - y_3|} &\Rightarrow 0, \\ G_H^1 - \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3 - y_3|} &\Rightarrow 0, \\ G_H^3 - \frac{i}{ab\gamma_{00}} e^{i\gamma_{00}|x_3 - y_3|} - \frac{2i}{ab\gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3 - y_3|} &\Rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Из полученного следует, что некоторые компоненты ТФГ не имеют предела при $x_3 \rightarrow \infty$, однако впредь будем писать, например, так:

$$G_E^2 \Rightarrow \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3 - y_3|},$$

понимая предельный переход в смысле формул (2).

Все равномерно убывающие к нулю члены рядов ТФГ имеют производные по всем переменным любого порядка, также равномерно исчезающие на бесконечности. Поэтому несложно получить асимптотику для производных компонент ТФГ. В качестве примеров приведем некоторые из результатов:

$$\frac{\partial G_E^1}{\partial x_k}, \frac{\partial G_E^3}{\partial x_k}, \frac{\partial G_H^2}{\partial x_k}, \frac{\partial G_E^2}{\partial x_2}, \frac{\partial G_H^3}{\partial x_2} \Rightarrow 0, \quad \frac{\partial G_H^3}{\partial x_1} \Rightarrow -\frac{2\pi i}{a^2 b \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|},$$

$$\frac{\partial G_H^3}{\partial x_3} \Rightarrow \text{sign}(y_3 - x_3) \left[\frac{e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|}}{ab} + \frac{2}{ab} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \right].$$

3. Асимптотические интегральные уравнения электромагнитного поля

Запишем представление поля вне области V ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в левых частях равенств) через значения известных $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ и полей в области неоднородности:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}_0(x) + k_0^2 \int_V \hat{G}_E(x, y) \hat{\xi}(y) \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_V \hat{G}_E(x, y) \hat{\xi}(y) \mathbf{E}(y) dy + i\omega_0 \text{rot} \int_V \hat{G}_H(x, y) \hat{\eta}(y) \mathbf{H}(y) dy; \\ \mathbf{H}(x) &= \mathbf{H}_0(x) + k_0^2 \int_V \hat{G}_H(x, y) \hat{\eta}(y) \mathbf{H}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_V \hat{G}_H(x, y) \hat{\eta}(y) \mathbf{H}(y) dy - i\omega_0 \text{rot} \int_V \hat{G}_E(x, y) \hat{\xi}(y) \mathbf{E}(y) dy. \end{aligned}$$

В таком образом записанных уравнениях и осуществим предельный переход при $x_3 \rightarrow +\infty$.

В полученных ниже формулах, вытекающих из доказанной леммы, предполагается суммирование по повторяющемуся индексу (кроме того, всюду ниже подразумевается стремление при $x_3 \rightarrow \pm\infty$ равномерно по $y \in V$):

$$\begin{aligned} \hat{G}_E \hat{\xi} \mathbf{E} &\Rightarrow \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\xi_{2l} E^l \right) \cdot \mathbf{e}_2, \quad \text{grad div} \hat{G}_E \hat{\xi} \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{0}; \\ \text{rot} \hat{G}_E \hat{\xi} \mathbf{E} &\Rightarrow \frac{\text{sign}(x_3 - y_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\xi_{2l} E^l \right) \cdot \mathbf{e}_1 + \\ &+ \frac{\pi i}{a^2 b \gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\xi_{2l} E^l \right) \cdot \mathbf{e}_3; \\ \hat{G}_H \hat{\eta} \mathbf{H} &\Rightarrow \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{1l} H^l \right) \cdot \mathbf{e}_1 + \\ &+ \left(\frac{i}{ab\gamma_{00}} e^{i\gamma_{00}|x_3-y_3|} + \frac{2i}{ab\gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \right) \left(\eta_{3l} H^l \right) \cdot \mathbf{e}_3; \\ \text{rot} \hat{G}_H \hat{\eta} \mathbf{H} &\Rightarrow \frac{\text{sign}(y_3 - x_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{1l} H^l \right) \cdot \mathbf{e}_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\pi i}{a^2 b \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{3l} H^l \right) \cdot \mathbf{e}_2; \\
\text{grad div } \hat{G}_H \hat{\eta} \mathbf{H} & \Rightarrow \frac{-i\pi^2}{a^3 b \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{1l} H^l \right) \cdot \mathbf{e}_1 + \\
& + \frac{2\pi \text{sign}(x_3 - y_3)}{a^2 b} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{3l} H^l \right) \cdot \mathbf{e}_1 + \\
& + \frac{\pi \text{sign}(y_3 - x_3)}{a^2 b} \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{1l} H^l \right) \cdot \mathbf{e}_3 - \\
& - \left(\frac{i\gamma_{00}}{ab} e^{i\gamma_{00}|x_3-y_3|} + \frac{2i\gamma_{10}}{ab} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \right) \left(\eta_{3l} H^l \right) \cdot \mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Из последних формул вытекают уравнения для компонент поля:

$$\begin{aligned}
E_\infty^1 &= E_0^1, \quad E_\infty^3 = E_0^3, \quad H_\infty^2 = H_0^2; \\
E_\infty^2 &= E_0^2 + \frac{ik_0^2}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\xi_{2l} E^l \right) dy + \\
& + \frac{i\omega\mu_0 \text{sign}(y_3 - x_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{1l} H^l \right) dy - \\
& - \frac{2\pi\omega\mu_0}{a^2 b \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{3l} H^l \right) dy; \\
H_\infty^1 &= H_0^1 + \frac{ik_0^2}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{1l} H^l \right) dy - \\
& - \frac{i\pi^2}{a^3 b \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{1l} H^l \right) dy + \\
& + \frac{2\pi \text{sign}(x_3 - y_3)}{a^2 b} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{3l} H^l \right) dy + \\
& + \frac{i\omega\varepsilon_0 \text{sign}(y_3 - x_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\xi_{2l} E^l \right) dy; \\
H_\infty^3 &= H_0^3 + \frac{2ik_0^2}{ab\gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{3l} H^l \right) dy - \\
& - \frac{2i\gamma_{10}}{ab} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \left(\eta_{3l} H^l \right) dy +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\pi \operatorname{sign}(y_3 - x_3)}{a^2 b} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3 - y_3|} \left(\eta_{ll} H^l \right) dy +$$

$$+ \frac{\pi \omega \varepsilon_0}{a^2 b \gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3 - y_3|} \left(\xi_{2l} E^l \right) dy.$$

Для получения асимптотических уравнений в окончательном виде необходимо определить вид поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ и поля на бесконечности.

Следуя [7], запишем электрическое поле в виде

$$\mathbf{E}_0 = \left[0, \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3}, 0 \right]^T,$$

а соответствующее ему магнитное поле получим из однородных уравнений Максвелла в полном волноводе:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = \frac{-i\pi\gamma_{10}}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \cdot \mathbf{e}_3.$$

Таким образом, компоненты падающего поля определяются следующими формулами:

$$E_0^1 = E_0^3 = H_0^2 = 0, \quad E_0^2 = F^{(+)} \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3},$$

$$H_0^1 = F^{(+)} \frac{-i\pi\gamma_{10}}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3},$$

$$H_0^3 = F^{(+)} \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3}. \quad (3)$$

Здесь коэффициент $F^{(+)}$ определяет амплитуду падающей волны и считается известным.

Прошедшее поле также считается известным; его амплитуда определяется экспериментально – обозначим ее $T^{(+)}$. Учитывая, что поляризация поля сохраняется – это хорошо видно из ранее выписанных уравнений, запишем прошедшее поле в виде

$$E_{+\infty}^1 = E_{+\infty}^3 = H_{+\infty}^2 = 0,$$

$$E_{+\infty}^2 = T^{(+)} \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3},$$

$$H_{+\infty}^1 = T^{(+)} \frac{-i\pi\gamma_{10}}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3},$$

$$H_{+\infty}^3 = T^{(+)} \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3}. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в интегродифференциальные уравнения и сокращая общие множители, получим с учетом поведения компонент ТФГ при $x_3 \rightarrow +\infty$ окончательный вид асимптотических интегральных уравнений электромагнитного поля в волноводе с локальной анизотропной неоднородностью:

$$\begin{aligned}
 T^{(+)} &= F^{(+)} + \frac{k_0^2}{\omega \mu_0 \pi \gamma_{10}} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_{10} y_3} \left(\xi_{2l} E^l \right) dy - \\
 &- \frac{1}{b \pi} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_{10} y_3} \left(\eta_{1l} H^l \right) dy + \frac{2i}{ab \gamma_{10}} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_{10} y_3} \left(\eta_{3l} H^l \right) dy, \\
 T^{(+)} &= F^{(+)} - \frac{k_0^2}{\pi b \gamma_{10}^2} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_{10} y_3} \left(\eta_{1l} H^l \right) dy - \\
 &- \frac{\pi}{a^2 b \gamma_{10}^2} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_{10} y_3} \left(\eta_{1l} H^l \right) dy + \frac{2i}{ab \gamma_{10}} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_{10} y_3} \left(\eta_{3l} H^l \right) dy + \\
 &+ \frac{\omega \varepsilon_0}{b \pi \gamma_{10}} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_{10} y_3} \left(\xi_{2l} E^l \right) dy, \\
 T^{(+)} &= F^{(+)} + \frac{2iak_0^2}{b \pi^2 \gamma_{10}} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_{10} y_3} \left(\eta_{3l} H^l \right) dy - \\
 &- \frac{1}{b \pi} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_{10} y_3} \left(\eta_{3l} H^l \right) dy + \frac{2ia \gamma_{10}}{b \pi^2} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_{10} y_3} \left(\eta_{1l} H^l \right) dy + \\
 &+ \frac{\omega \varepsilon_0}{b \pi \gamma_{10}} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_{10} y_3} \left(\xi_{2l} E^l \right) dy.
 \end{aligned}$$

4. Метод поворотов для восстановления $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$

Как видно из последней системы, асимптотические уравнения не содержат всех компонент искоемых тензоров. А именно: в равенствах отсутствуют компоненты второй строки тензора $\hat{\mu}$, а также компоненты первой и третьей строк для $\hat{\varepsilon}$. Это не позволяет полностью решить рассматриваемую задачу, за исключением тех случаев, в которых известен (априори) класс тел V и соответствующая ему конкретная структура тензора: например, могут рассматриваться только кристаллы фиксированного типа или только изотропные тела. Эта проблема может быть решена вращением тела V .

Ниже все рассуждения проведены для тензора $\hat{\varepsilon}$.

При наиболее общих предположениях относительно рассматриваемого тела V его диэлектрическая проницаемость характеризуется двухвалентным тензором (типа аффинор):

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

В записи компонент будем придерживаться принятой в электродинамике (хотя немного неточной и совсем неудобной) двойной индексации компонент *снизу*.

Пусть $[\mathbf{P}]$ – матрица перехода от старого ортонормального базиса $\mathfrak{B}$ к новому $\mathfrak{B}'$: $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \cdot [\mathbf{P}]$, определяющая некоторое преобразование декартовой системы координат.

Рассмотрим материальное уравнение, связывающее напряженность электрического поля и электромагнитную индукцию $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$. Уравнения в координатах записываются в базисах $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ соответственно:

$$[\mathbf{D}] = \hat{\varepsilon} \cdot [\mathbf{E}], \quad [\mathbf{D}]' = \hat{\varepsilon}' \cdot [\mathbf{E}]'.$$

Учитывая, что $[\mathbf{D}] = [\mathbf{P}] \cdot [\mathbf{D}]'$ и $[\mathbf{E}] = [\mathbf{P}] \cdot [\mathbf{E}]'$, получим

$$[\mathbf{D}] = \hat{\varepsilon} \cdot [\mathbf{E}] = [\mathbf{P}] \cdot [\mathbf{D}]' = [\mathbf{P}] \cdot \hat{\varepsilon}' \cdot [\mathbf{E}]' = [\mathbf{P}] \cdot \hat{\varepsilon}' \cdot [\mathbf{P}]^{-1} \cdot [\mathbf{E}],$$

откуда при возможной неоднородности тела выводим

$$\hat{\varepsilon}(x) = [\mathbf{P}] \cdot \hat{\varepsilon}'(x') \cdot [\mathbf{P}]^{-1}, \quad \hat{\varepsilon}'(x') = [\mathbf{P}]^{-1} \cdot \hat{\varepsilon}(x) \cdot [\mathbf{P}].$$

В рассуждениях о преобразовании базисов (осей координат) предполагалось, что тело V не меняет своего положения (если же вместе с осями поворачивается и тело, то компоненты его тензора не меняются). Обратно, если по отношению к осям изменить положение тела V , то получится новый набор коэффициентов.

Пусть тело V содержится в $Q = \{x : x_1 \in (0, a), x_2 \in (0, b), x_3 \in (-c, c)\}$. Будем рассматривать повороты тела вокруг центра области Q на угол φ в плоскостях, параллельных осям координат. Такие повороты равносильны композиции трех преобразований: сдвиг тела на вектор $(-a/2, -b/2, 0)^T$, его поворот вокруг начала координат в нужной плоскости и обратный сдвиг; при этом сдвиги не меняют структуры тензора.

Посмотрим, как преобразуется тензор $\hat{\varepsilon}$ при повороте тела на угол φ по часовой стрелке вокруг оси Ox_3 . Это преобразование равносильно повороту системы координат тела на угол φ против часовой стрелки и определяется известной матрицей (преобразования базисов)

$$[\mathbf{P}^{(3)}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{P}^{(3)}]^{-1} = [\mathbf{P}^{(3)}]^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обозначив $\cos \varphi =: c$, $\sin \varphi =: s$, вычислим

$$\hat{\varepsilon}^{(3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}c^2 + \varepsilon_{12}cs + \varepsilon_{21}cs + \varepsilon_{22}s^2 & -\varepsilon_{11}cs + \varepsilon_{12}c^2 - \varepsilon_{21}s^2 + \varepsilon_{22}cs & \varepsilon_{13}c + \varepsilon_{23}s \\ -\varepsilon_{11}cs - \varepsilon_{12}s^2 + \varepsilon_{21}c^2 + \varepsilon_{22}cs & \varepsilon_{11}s^2 - \varepsilon_{12}cs - \varepsilon_{21}cs + \varepsilon_{22}c^2 & -\varepsilon_{13}s + \varepsilon_{23}c \\ \varepsilon_{31}c^2 + \varepsilon_{32}s & -\varepsilon_{31}s + \varepsilon_{32}c & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

При повороте тела на угол $\varphi = \pi/2$ вокруг оси Ox_3 получим

$$\hat{\varepsilon}^{(3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{21} & \varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{32} & -\varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

При повороте на угол $\varphi (= \pi/2)$ вокруг осей Ox_2 и Ox_1 матрицы перехода определяются следующим образом:

$$[P^{(2)}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}, [P^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

а тензор $\hat{\varepsilon}$ принимает соответственно вид

$$\hat{\varepsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{33} & -\varepsilon_{32} & -\varepsilon_{31} \\ -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{21} \\ -\varepsilon_{13} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} \end{bmatrix} \text{ и } \hat{\varepsilon}^{(1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} & -\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} & -\varepsilon_{32} \\ -\varepsilon_{21} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

Такие преобразования позволяют записать асимптотические уравнения с вхождением в них всех требуемых компонент. Например, при повороте вокруг оси Ox_3 уравнения будут содержать неизвестные ε_{1j} и μ_{2j} .

Список литературы

1. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 11–24.
2. **Смирнов, Ю. Г.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, Д. И. Васюнин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 71–87.
3. **Деревянчук, Е. Д.** Решение обратной задачи определения диэлектрической проницаемости диафрагмы в волноводе / Е. Д. Деревянчук // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 4. – С. 36–44.
4. **Гришина, Е. Е.** Численный метод решения обратной задачи восстановления эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициентам отражения / Е. Е. Гришина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2. – С. 75–84.

5. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и Связь, 1998.
6. **Марков, Г. Т.** Тензорные функции Грина прямоугольных волноводов и резонаторов / Г. Т. Марков, Б. А. Панченко // Известия вузов СССР. Радиотехника. – 1964. – Т.1, № 1. – С. 34–41.
7. **Вайнштейн, Л. А.** Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Советское радио, 1957.

References

1. Smirnov Ju. G. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Povolzhskij region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2009, no. 1, pp. 11–24.
2. Smirnov Ju. G., Medvedik M. Ju., Vasjunin D. I. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Povolzhskij region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2009, no. 3, pp. 71–87.
3. Derevjanchuk E. D. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Povolzhskij region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 4, pp. 36–44.
4. Grishina E. E. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Povolzhskij region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2012, no. 2, pp. 75–84.
5. Samohin A. B. *Integral'nye uravnenija i iteracionnye metody v jelektromagnitnom ras-sejanii* [Integral equations and iteration methods in magnetic scattering]. Moscow: Radio i Svjaz', 1998.
6. Markov G. T., Panchenko B. A. *Izvestija Vuzov SSSR. Radiotekhnika* [USSR University Proceedings. Radio engineering]. 1964, vol. 1, no. 1, pp. 34–41.
7. Vajnshtejn L. A. *Jelektromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow: Sovetskoe radio, 1957.

Цупак Алексей Александрович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

Tsupak Aleksej Aleksandrovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modelling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 517.3

Цупак, А. А.

Система асимптотических интегральных уравнений задачи определения тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей объемного тела в прямоугольном волноводе / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 105–116.